Actes de la XIII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2015) p. 25-32
DOI: 10.2436/10.2006.02.3

L'ÚS DE CONTEXTOS HISTÒRICS A L'AULA DE MATEMÀTIQUES DE SECUNDÀRIA: EL CAS CONCRET DE LA VISUALITZACIÓ EN LA CONNEXIÓ GEOMETRIA-ÀLGEBRA

IOLANDA GUEVARA CASANOVA
DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT DE LA GENERALITAT DE CATALUNYA.
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES I CIÈNCIES EXPERIMENTALS DE LA UAB.

Paraules clau: ensenyament/aprenentatge de l'àlgebra, connexió geometria-àlgebra, visualització, context històric, al-Khwarizmi, Liu Hui

Using historical contexts in the secondary mathematics classroom: the case of visualization connecting geometry with algebra

Summary: *The teaching and learning of algebra in the stage of compulsory secondary education includes structures, relationships and language, but the introduction and use of this language is difficult for most students by degree of abstraction involved.*

This article presents the results of research that has studied the extent to which the introduction of geometric diagrams historical related to the curriculum of secondary education, encourages students solve certain problems. That is, identify potential opportunities for learning and their respective effects on introducing geometrical diagrams historic tasks of students.

Key words: *teaching / learning of algebra, geometry-algebra connection, visualization, historical context, al-Khwārizmī, Liu Hui*

Introducció

En l'etapa de l'educació secundària obligatòria l'ensenyament-aprenentatge de l'àlgebra inclou estructures, relacions i llenguatge, però la introducció i l'ús d'aquest llenguatge és difícil per a la majoria de l'alumnat pel grau d'abstracció que comporta.

L'àlgebra és el bloc de continguts més extens del currículum de matemàtiques (Catalunya. Decret 143/2007), per aquesta raó s'ha centrat l'estudi en un camp de treball més acotat: la visualització d'alguns processos matemàtics. La decisió s'ha pres perquè hi ha moltes teories sobre els avantatges d'aquest mètode, dins de l'àmbit educatiu i en particular en l'àmbit educatiu matemàtic (Arcavi, 2003; Burgués, 2008; (Giaquinto, 2007; Mason *et al.*, 2005), i també pel paper que té en el món d'avui dia.

En el treball es planteja la idoneïtat de relacionar el llenguatge simbòlic de l'àlgebra amb la geometria, amb la intenció de potenciar el pensament i el raonament visual dels alumnes, per a millorar l'aprenentatge d'aquest nou llenguatge a base de fer-lo més significatiu i lligat a l'adquisició de les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic (Burgués & Serramona, 2013). L'eina utilitzada per a establir la connexió geometria-àlgebra són els diagrames.

La introducció de diagrames pretén connectar el pensament simbòlic propi de l'àlgebra amb el pensament visual relacionat amb les figures geomètriques. Historiadors, pedagogs (Katz & Barton, 2007) i molts especialistes en didàctica de la matemàtica (NCTM, 2000; Niss, 2002; 2011) defensen la connexió entre continguts aparentment diferents com una de les accions integrades en els processos matemàtics.

Fa uns anys havia estudiat alguns diagrames que provenien de la història de les matemàtiques, i els havia dut a l'aula (Guevara *et al.*, 2006; Guevara, 2009; Guevara & Massa, 2009), però no havia analitzat fins a quin punt la seva introducció havia millorat l'aprenentatge dels alumnes. Ara era l'ocasió de posar-los en el punt de mira perquè s'ajustaven perfectament a determinats continguts del currículum d'àlgebra sobre els quals es volia incidir.

Els problemes proposats als alumnes corresponen a situacions on intervenen triangles rectangles o bé a la resolució d'equacions de 2n grau. En tots els casos, la proposta passa perquè els alumnes transfereixin el raonament expressat en forma lingüística (expressions algebraiques de 2n grau) al raonament visual amb diagrames (figures amb quadrats i rectangles) que són la interpretació geomètrica de

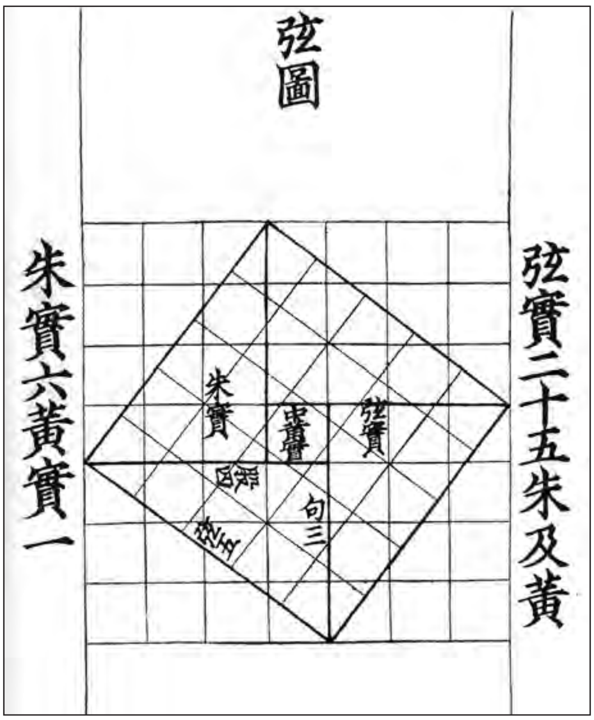

FIGURA 1. Diagrames dels *Nou capítols* en l'edició de Bao Huanzhi (1213) segons Chemla & Shudrun (2005).

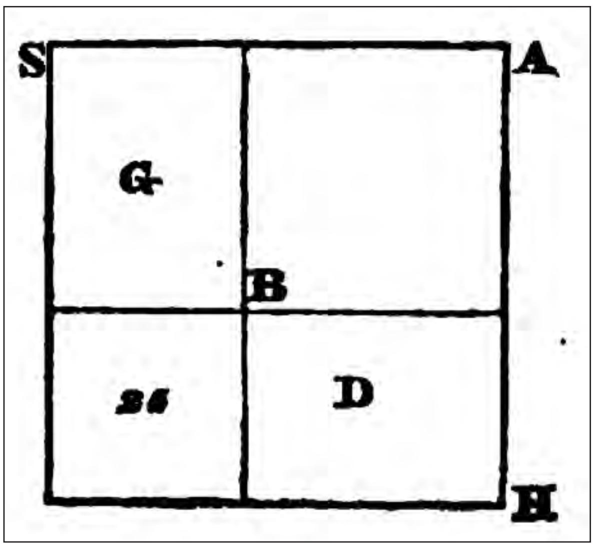

FIGURA 2. Al-Khwārizmī (813), *Tractat d'àlgebra* (edició de F. Rosen, 1831).

les expressions algebraiques de 2n grau. Per tant, la recerca està centrada en el procés d'aprenentatge dels alumnes, específicament en els resultats aconseguits pels alumnes utilitzant aquests diagrames.

Els problemes en els quals intervenen triangles rectangles corresponen al capítol 9 dels *Nou capítols*, problemes 1-13 i 24 en la versió de Chemla & Shuchun (2005). En la figura 1 es reprodueix un d'aquests diagrames. El que interessa destacar és la justificació del procediment de càlcul del text clàssic (s. I) amb raonaments geomètrics que fa Lui Hui en l'edició de l'any 263. Aquests raonaments geomètrics han estat estudiats i transcrits en forma de figures per diferents historiadors de la matemàtica xinesa antiga (Cullen, 1996; Chemla & Shuchun, 2005; Dauben, 2007).

La resolució d'equacions de segon grau completant quadrats geomètrics s'ha desenvolupat a partir del text d'al-Khwarizmi, segons l'edició de F. Rosen (1831), en la reedició de 1986, i de les aportacions de Massa (2005), Guevara (2009) i Guevara i Massa (2009). En la figura 2 es reprodueix un d'aquests diagrames.

La resolució d'un problema amb diagrames de càlcul, en la línia de classificació dels diagrames de Giardino (2009), conté dos tipus d'elements, els diagrames i les accions diverses que intervenen en relació amb els diagrames: construcció, transformació, interpretació i lectura. El fil conductor de l'anàlisi duta a terme ha estat identificar aquestes quatre accions en els treballs dels alumnes. A partir dels resultats obtinguts s'han elaborat les conclusions del treball i s'han classificat i organitzat en quatre blocs: traducció, transformació, raonament diagramàtic i avantatges en l'ús de diagrames.

Traducció

En aquest apartat es recullen conclusions sobre les equivalències que estableixen el alumnes entre el llenguatge algebraic i la seva representació geomètrica; com reconeixen les dades del problema i les transfereixen damunt del primer diagrama, i com identifiquen les relacions entre les dades del problema i les traslladen al diagrama de dades i després al primer diagrama de càlcul.

De les sis conclusions que es recullen en el treball referides a la traducció (Guevara, 2015: 428-435) destacaríem com a més rellevant la tercera: els alumnes associen els termes de 1r grau amb coeficients unitaris (x) a longituds, els de 1r grau amb altres coeficients (6x) a àrees i els de 2n grau també a àrees. Els valors numèrics, amb longituds o amb àrees.

En la figura 3 es poden observar les equivalències que estableix una alumna entre els termes 6x, x i 40 i els costats i les àrees de la figura, mitjançant les etiquetes corresponents que situa dins de la figura, quan es tracta de valors que corresponen a àrees, o damunt del costat, quan es tracta de longituds.

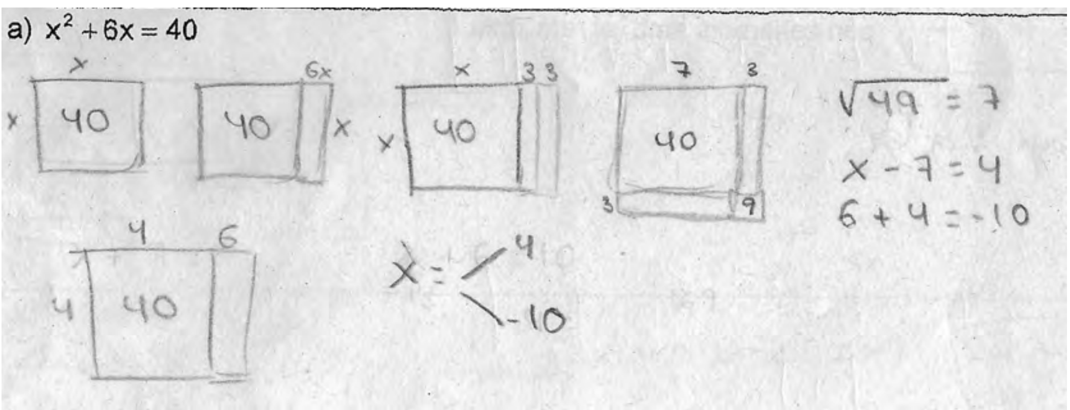

FIGURA 3. Producció d'una alumna amb 6x, x i 40.

Transformació

En aquest apartat es recullen les conclusions sobre els processos de transformació dels diagrames; quines són les sèries clau de transformació dels diagrames per a la resolució del problema i la seva predictibilitat; el nombre de diagrames que conté la sèrie associada a un tipus de problema; el nombre de diagrames que fa un alumne determinat per resoldre un determinat tipus de problema, i, finalment, l'estructura i el sentit de les transformacions.

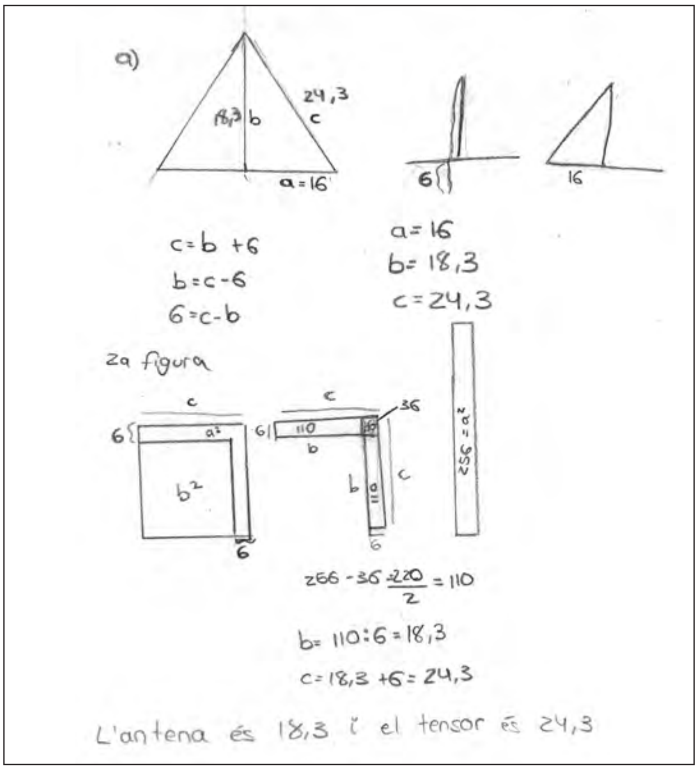

FIGURA 4. Resolució completa de l'alumna 1.

De les quatre conclusions que recull el treball referides a la transformació (Guevara, 2015: 435-445) destacaríem com a més significativa la primera: el fil conductor que guia els processos de transformació dels diagrames és la transformació de les àrees de les figures (quadrats i rectangles) que contenen els diagrames.

En la figura 4 es pot veure la resolució d'una alumna en un problema de triangles rectangles en què el fil conductor del procés és la transformació de l'àrea 256. En la figura 5, una altra alumna resol l'equació $x^2 + 6x = 40$ i ara el fil conductor del procés és la transformació de l'àrea 40.

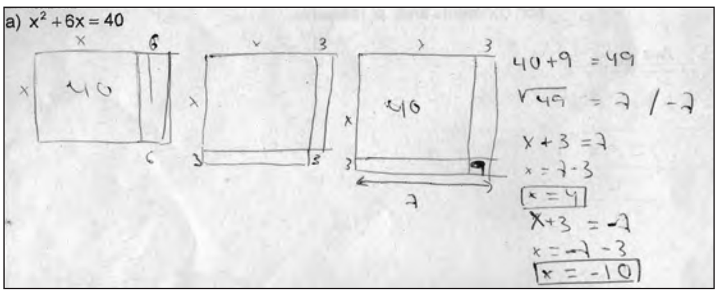

FIGURA 5. Resolució completa d'una alumna.

Raonament diagramàtic

En aquest apartat es recullen les conclusions del treball pel que fa al raonament estratègic diagramàtic; s'identifiquen els elements clau dels diagrames per a la resolució dels problemes i el que representen en el raonament fet pels alumnes.

Mancosu (2005) diferencia entre visualització i raonament diagramàtic. Utilitza el terme visualització en parlar dels treballs de Giaquinto (1992), que defensa els diagrames com a eina de descobriment. En canvi, parla de raonament diagramàtic quan es refereix al treball de Barwise i Etchemendy (1996), que avalen els diagrames com a eina de demostració. En la recerca, els alumnes descobreixen la solució del problema mitjançant la transformació (demostració) dels diagrames.

De les tres conclusions referides al raonament diagramàtic (Guevara, 2015: 445-451) destacaríem com a més rellevant la segona: les etiquetes essencials que utilitzen els alumnes són les etiquetes numèriques per davant de les algebraiques. Sense elles, el diagrama no fa de fil conductor.

En la figura 6 es pot veure el procés de resolució d'una alumna per a l'equació $x^2 + 6x = 40$ en el qual no utilitza cap etiqueta algebraica:

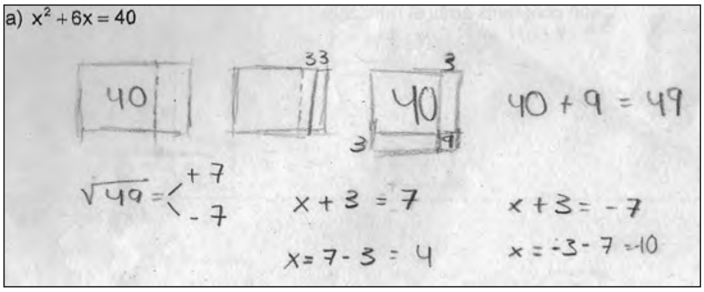

FIGURA 6. Resolució d'una alumna sense cap etiqueta algebraica.

Avantatges en l'ús de diagrames

En aquest apartat s'inclouen conclusions més globals referides als avantatges i inconvenients en l'ús de diagrames per a la resolució de problemes a l'ESO que es corresponen amb la finalitat última de l'estudi presentat.

Giardino (2014) afirma que l'avantatge cognitiu d'utilitzar diagrames no està determinat únicament pel fet que els diagrames són «més visuals» que les frases lingüístiques, sinó que els diagrames representen un avantatge cognitiu no per principi, sinó que depèn del problema plantejat. Per això s'han considerat els avantatges relacionats amb les tasques proposades i també quins conceptes ha de tenir assolits l'alumnat per tal de ser capaç d'utilitzar aquests diagrames que relacionen l'àlgebra amb la geometria.

Sobre els avantatges de l'ús de diagrames s'han obtingut quatre conclusions. La primera: els alumnes han optat majoritàriament pel mètode geomètric perquè se senten més còmodes amb el raonament visual. La segona: amb el raonament visual els alumnes són més eficaços, hi ha més alumnes que ho resolen bé, i a més ho resolen millor. La tercera: per a manipular amb soltesa els diagrames de càlcul els alumnes han de distingir entre perímetre i àrea, i entre mesura de longitud i de superfície. La quarta: perquè els alumnes puguin connectar geometria amb àlgebra han de tenir desenvolupades com a mínim dues capacitats. La primera, identificar i distingir de quantes figures està construïda una determinada figura; la segona, interpretar i traduir dades d'una relació algebraica a longituds i àrees d'una figura geomètrica i viceversa, des de la figura geomètrica llegir les relacions entre dades que conté o expressar-les a través d'una fórmula o equació (Guevara, 2015: 452-458).

De les quatre conclusions referides als avantatges en l'ús de diagrames destacaríem com a més significativa la tercera.

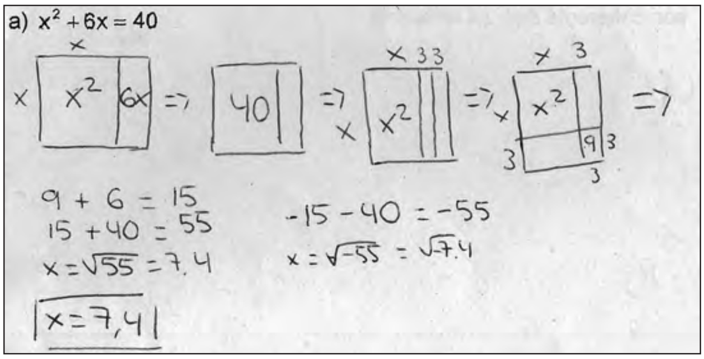

FIGURA 7. Suma d'àrees i longituds en la resolució d'una alumna.

En la figura 7 es pot veure la resolució d'una alumna que suma valors corresponents a àrees i a longituds. Aquest fet li impedeix arribar al resultat final correctament.

Implicacions pedagògiques per a l'ensenyament i l'aprenentatge de l'àlgebra

Els resultats recollits en l'anàlisi de les activitats dels alumnes i les conclusions generades ens permeten afirmar que l'ensenyament de l'àlgebra en els primers cursos s'hauria de fer amb activitats que promoguin el raonament visual, i una eina adequada per a fer-ho són els diagrames. És a dir, que la introducció de l'àlgebra, a més de ser una generalització de l'aritmètica, un model on les regles amb nombres passen a ser regles amb lletres, hauria de tenir també un component visual, el que dóna la interpretació geomètrica de les fórmules de l'àlgebra. En aquest paradigma les expressions lineals es poden interpretar, en funció de la situació, com a àrees o com a longituds de segments, i les expressions quadràtiques s'interpreten com a àrees. Totes les operacions i les regles per a dur-les a terme tenen la seva interpretació en el model geomètric. D'aquesta manera les propietats de les operacions no es justifiquen únicament amb unes regles o amb una gramàtica dels símbols, sinó que tenen un equivalent en el model geomètric.

Passar de l'aritmètica a l'àlgebra saltant-se la geometria es pot considerar com un error didàctic-històric, que té explicació en el context del segle XVII quan la força del nou llenguatge simbòlic va desplaçar el raonament geomètric visual, però no en el segle XXI (Katz & Barton, 2007). Al llarg de molts segles la humanitat, en absència del llenguatge formal de l'àlgebra i només amb les quatre operacions bàsiques de l'aritmètica, ha estat capaç de resoldre problemes que ara es resolen amb equacions. Avui en dia, una part important dels alumnes no arriben a resoldre aquests problemes perquè no han comprès amb profunditat les regles d'aquest llenguatge i són analfabets, des del punt de vista de les matemàtiques. Potser, en els inicis de l'aprenentatge de l'àlgebra, cal retornar al raonament dels matemàtics antics, ja que ells resolien problemes i feien càlculs però es basaven en models geomètrics per a justificar la validesa de les seves operacions.

Referències bibliogràfiques

AL-KHWARIZMI (1986), *The Algebra of Mohammed ben Musa*. A: ROSEN, F. (ed. i trad.), (1a ed., Londres, 1831) Hildesheim/Zürich/Nova York, George Olms Verlag.

ARCAVI, A. (2003), «The role of visual representations in the learning of mathematics», *Educational Studies in Mathematics* **52**, 215-241.

BARWISE, J.; ETCHEMENDY, J. (1996), «Visual Information and Valid Reasoning». A: ALLWEIN, G.; BARWISE, J. (eds.), *Logical Reasoning with Diagrams*, New York, Oxford University Press, 3-23.

BURGUÉS, C. (2008), «La representación de las idees matemáticas». A: HERVÁS- ASENJO, M. M. (coord.), *Competencia matemàtica e interpretación de la realidad*, Madrid, Secretaria General Técnica del MEC, 23-40.

BURGUÉS, C.; SERRAMONA, J. (coord.) (2013), *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*, Barcelona, Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya [en línia] <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_eso.pdf> (Darrer accés: 31/01/16.)

CATALUNYA. DECRET 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria. Annex 2. Currículum de l'educació secundària obligatòria. Àmbit matemàtiques (DOGC, núm. 4915, 29-6-2007, p. 21927-21935) [en línia] <http://portaldogc.gencat.cat/utilsEADOP/PDF/4915/914189.pdf> (Darrer accés: 31/01/16.)

CHEMLA, K.; SHUCHUN, G. (eds.) (2005), *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, París, Dunod [edició crítica bilingüe].

CULLEN, C. (1996), *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*, Cambridge / New York, Cambridge University Press.

DAUBEN, J. W. (2007), «Chinese Mathematics». A: KATZ, V. J. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook*, Princeton, New Jerse, Princeton University Press, 187-384.

GIAQUINTO, M. (1992), «Visualizing as means of geometrical discovery», *Mind and Language*, **7**, 382-401.

GIAQUINTO, M. (2007), *Visual Thinking in Mathematics*, Oxford, Oxford Univ. Press.

GIARDINO, V. (2009), «Towards a diagrammatic classification», *The Knowledge Engineering Review*, **00**, (0), 1-13.

GIARDINO, V. (2014), *Diagram Based Reasoning* [en línia] <https://diagrambasedreasoning.wordpress.com/> (Darrer accés: 31/01/16.)

GUEVARA, I.; MASSA, M. R.; ROMERO, F. (2006), «Textos históricos para la enseñanza de las matemáticas». A: PÉREZ-BUSTAMANTE, J. A., et al. (coords.), *Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Cádiz, SEHCYT, 1301-1304.

GUEVARA, I. (2009), *La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària: La introducció de contextos històrics a l'aula, un recurs per a millorar la competència matemàtica* [en línia] <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200809/memories/1864m.pdf> (Darrer accés: 31/01/16.)

GUEVARA, I.; MASSA, M. R. (2009), «La història de les matemàtiques en els nous currículums de secundària», *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, volum 2 (1), 379-390.

GUEVARA, I. (2015), *L'ús de contextos històrics a l'aula de matemàtiques de secundària: El cas concret de la visualització en la connexió geometria-àlgebra*. (Tesi doctoral). Universitat de Barcelona [en línia] <http://hdl.handle.net/10803/301766> (Darrer accés: 31/01/16.)

KATZ, V. J.; BARTON, B. (2007), «Stages in the history of algebra with implications for teaching», *Educational Studies in Mathematics*, **66**, 185-201.

MANCOSU, P. (2001), «Mathematical Explanation: problems and prospects», *Topoi*, **20**, 97-117.

MANCOSU, P. (2005), «Visualitzation in Logic and Mathematics». A: MANCOSU, P. et al. (eds.), *Visualitzacion, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Netherlands, Springer, 13-30.

MASON, J.; GRAHAM, A.; JOHNSTON-WILDER, S. (2005), *Developing Thinking in Algebra*, SAGE Publications.

MASSA, M. R. (2005). «Les equacions de 2n grau al llarg de la història», *Biaix*, **24**, 4-15 [en línia] <https://5

ffae0819e4690bb429ba787c40104e2d48658f9.googledrive.com/host/0B-nqW6g1Bd5iWXFnOUNtYUhCaVU/biaix24/equacions.pdf> (Darrer accés: 31/01/16.)

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2000), *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, Granada, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Proyecto Sur Industrias Gráficas.

NISS, M. (2002), *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*, Denmark [en línia] <http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1213/docs/KOMkompetenser.pdf> (Darrer accés: 31/01/16.)

NISS, M.; HOJGAARD, T. (eds.) (2011), *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, Roskilde University, Department of Science, Systems and Models, IMFUFA tekst nr. 485 [en línia] <http://diggy.ruc.dk/bitstream/1800/7375/1/IMFUFA_485.pdf> (Darrer accés: 31/01/16.)